Open domains of discontinuity of the character variety

Suzanne Schlich [1]

[1] *Université Grenoble Alpes*
Institut Fourier
100 Rue des Mathématiques
38610 Gières France
suzanne.schlich@unistra.fr

Résumé. Dans cet exposé, on introduira la variété des caractères et l'action du groupe des automorphismes extérieurs sur celle-ci. On s'intéressera à la question de la dynamique de cette action et on cherchera des exemples d'ouverts de propre-discontinuité. Ainsi on commencera par donner deux exemples de tels ouverts motivés par la géométrie : l'espace de Teichmüller et les représentations convexes-cocompactes. Ensuite, on définira les représentations primitives-stables et les représentations de Bowditch qui donnent encore d'autres exemples et on présentera l'équivalence entre ces deux classes de représentations.
Mots-clés. Variété des caractères, ouverts de propre-discontinuité, géométrie hyperbolique, espace de Teichmüller, représentation de Bowditch, représentations primitives-stables

Abstract. In this talk, we will introduce the character variety and the action of the outer automorphism group on it. Understanding the dynamics of this action is a central issue, and thus finding open domains of discontinuity for this action is particularly interesting. We will start by giving two geometrically motivated examples of such open sets : the Teichmüller space and the set of convex-cocompact representations. Next, we will define primitive-stable representations and Bowditch representations, which give yet more examples, and we will present the equivalence between these two classes of representations.
Keywords. Character variety, open domains of discontinuity, hyperbolic geometry, Teichmüller space, Bowditch representations, primitive-stable representations

1 Ouverts de discontinuité de la variété des caractères

1.1 La variété des caractères

Dans ce qui suit, on fixe Γ un groupe de type fini et G un groupe topologique (en général G un groupe de Lie ou plus généralement G le groupe des isométries d'un espace métrique).

On s'intéresse à l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G muni de la topologie compacte-ouverte. Cet espace, bien trop gros d'un point de vue géométrique, admet un quotient par l'action de G par conjugaison que l'on appelle la *variété des caractères* (en fait on rend le quotient séparé en considérant l'"Hausdorffisation" de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$, c'est à dire son plus grand quotient séparé). On note cet espace $\chi(\Gamma, G) = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)//G$. Comme nous le verrons plus tard, la variété des caractères est particulièrement intéressante car dans bien des contextes, elle encode des structures géométriques.

On considère également le groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Inn}(\Gamma)$, c'est à dire le quotient du groupe des automorphismes du groupe Γ par les automorphismes intérieurs. Le groupe des automorphismes extérieurs interagit naturellement avec la variété des caractères. En effet, il y a une action de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ sur $\chi(\Gamma, G)$ par précomposition :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Out}(\Gamma) \times \chi(\Gamma, G) & \longrightarrow & \chi(\Gamma, G) \\ ([\phi], [\rho]) & \longmapsto & [\phi].[\rho] = [\rho \circ \phi^{-1}] \end{array}$$

Remarque 1. Bien que l'élément $\rho \circ \phi^{-1}$ ne soit pas bien défini puisque ϕ est uniquement défini aux automorphismes intérieurs près, sa classe $[\rho \circ \phi^{-1}]$, elle, est bien définie.

Comprendre la dynamique de cette action et trouver des sous-espaces de la variété des caractères sur lesquels l'action est géométriquement "sympathique" est une question centrale et très active dans le domaine. Plus précisément, on recherche des ouverts de discontinuité, c'est à dire des sous-ensembles ouverts sur lesquels l'action est proprement discontinue. On rappelle que l'action d'un groupe $\mathcal{G}$ sur un espace topologique $\mathcal{X}$ est dite *proprement discontinue* si, pour tout compact K de $\mathcal{X}$, l'ensemble $\{g \in \mathcal{G} \mid (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

1.2 Premier exemple : l'espace de Teichmüller

Dans cet exemple $\Gamma = \pi_1(S)$ et $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

L'exemple de départ qui motive l'étude des ouverts de discontinuité de la variété des caractères est l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$.
On se donne S une surface compacte orientée de caractéristique d'Euler $\chi(S) < 0$ et on note $\pi_1(S)$ son groupe fondamental. L'espace $\mathcal{T}(S)$ est l'espace des métriques hyperboliques vues à isotopies près sur S. C'est un fait classique que l'espace de Teichmüller s'identifie à une composante connexe de la variété des caractères $\chi(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$.

Le groupe modulaire $\mathrm{MCG}(S)$ de la surface S est le groupe des classes d'homotopies d'homéomorphismes de S préservant l'orientation. Il s'identifie à un sous-groupe d'indice deux du groupe $\mathrm{Out}(\pi_1(S))$ et agit sur l'espace de Teichmüller. La dynamique de l'action du groupe modulaire sur l'espace de Teichmüller est donnée par le Théorème de Fricke :

Théorème 1 (Fricke)**.** *L'action de* $\mathrm{MCG}(S)$ *sur* $\mathcal{T}(S)$ *est proprement discontinue.*

1.3 Deuxième exemple : Les représentations convexes-cocompactes

Dans cet exemple Γ est hyperbolique et $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$.

Un autre exemple central d'ouverts de discontinuité de la variété des caractères est l'espace des représentations convexes-cocompactes. Soit Γ un groupe hyperbolique et $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$, l'espace hyperbolique usuel de dimension n. On définit $\mathrm{CC}(\Gamma, G)$ le sous-espace de la variété des caractères constitué des représentations qui préservent un convexe non-vide de $\mathbb{H}^n$ sur lequel l'action est proprement discontinue et cocompacte. Cette condition est équivalente à demander que l'application orbitale soit un plongement quasi-isométrique. En particulier $\mathrm{CC}(\Gamma, G)$ est uniquement constitué de représentations discrètes. On peut montrer que $\mathrm{CC}(\Gamma, G)$ est ouvert et que l'action du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\Gamma)$ agit proprement discontinuement sur $\mathrm{CC}(\Gamma, G)$.

Ainsi on peut naturellement se demander s'il existe d'autres exemples d'ouverts de propre-discontinuité pour l'action de $\mathrm{Out}(\Gamma)$. Ces exemples sont-ils maximaux ou en existe-t-il de plus gros ? Peuvent-ils contenir des représentations non-discrètes ?

Les représentations de Bowditch et primitives-stables vont répondre à ces questions.

2 Représentations de Bowditch et primitives-stables

2.1 Représentations de Bowditch

En 1998, Bowditch a introduit dans [Bow98] une classe de représentations du groupe $\Gamma = \mathbb{F}_2$ (le groupe libre de rang deux) dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, ensuite généralisé par Tan, Wong, Zhang dans [TWZ08]. Ces représentations sont définies par des conditions sur les traces des images des éléments primitifs de $\mathbb{F}_2$. (On rappelle qu'un élément de $\mathbb{F}_k$ est dit *primitif* s'il appartient à une base de $\mathbb{F}_k$.) On note $\mathcal{P}(\mathbb{F}_2)$ l'ensemble des éléments primitifs de $\mathbb{F}_2$. En particulier, ils montrent que cet ensemble de représentations, noté $\mathcal{BQ}$, est ouvert et que le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathbb{F}_2$ agit proprement discontinuement dessus. De plus, ils montrent que les conditions qu'ils introduisent sur une représentation ρ sont équivalentes à l'existence $C > 0$ telle que pour tout élément primitif γ de $\mathbb{F}_2$, on a l'inégalité : $\frac{1}{C}\|\gamma\| \leq l(\rho(\gamma))$. Ici $\|\gamma\|$ désigne la longueur de mot cycliquement réduite de γ dans $\mathbb{F}_2$, et $l(\rho(\gamma))$ la longueur de translation de l'élément $\rho(\gamma)$ vu comme une isométrie de $\mathbb{H}^3$ (on rappelle que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$). Cette dernière inégalité, qui n'utilise plus les traces dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ se généralise directement à n'importe quel groupe

G des isométries d'un espace métrique. En particulier, dans ce travail on s'intéressera particulièrement à $G = \mathrm{Isom}(X)$, avec X un espace δ-hyperbolique (géodésique, propre). Cela motive la définition suivante pour les représentations de Bowditch dans le contexte plus général d'un groupe G d'isométries d'un espace métrique (hyperbolique) :

Définition 1. Soit $\rho : \mathbb{F}_2 \to \mathrm{Isom}(X)$ une représentation. On dit que ρ est une *représentation de Bowditch* s'il existe deux constantes $C \geq 1, D \geq 0$ telles que :

$$\forall \gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_2), \quad \frac{1}{C}\|\gamma\| - D \leq l(\rho(\gamma))$$

On note $\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$ l'ensemble des représentations de Bowditch de $\mathbb{F}_2$ dans $\mathrm{Isom}(X)$.

2.2 Représentations primitives-stables

Par ailleurs, Minsky a introduit en 2010 dans [Min13] les représentations primitives-stables d'un groupe libre $\mathbb{F}_n$ à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Il s'agit de représentations pour lesquels l'application orbitale réalise des plongements quasi-isométriques uniformes sur les axes des éléments primitifs dans le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_n$. Cette définition, bien qu'initiallement introduite dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ par Minsky, se généralise directement aux groupes $\mathrm{Isom}(X)$ d'isométries d'espaces métriques (hyperboliques).

Définition 2. Soit $\rho : \mathbb{F}_n \to \mathrm{Isom}(X)$ une représentation. On dit que ρ est *primitive-stable* s'il existe deux constantes $C \geq 1$ et $D \geq 0$ telles que pour tout élément primitif $\gamma \in \mathbb{F}_n$, l'application orbitale τ_ρ restreinte à l'axe de γ dans le graphe de Cayley, est un (C, D) plongement quasi-isométrique.

On note $\mathcal{PS}(\mathbb{F}_n, \mathrm{Isom}(X))$ l'ensemble des représentations primitives-stables de $\mathbb{F}_n$ dans $\mathrm{Isom}(X)$. Minsky montre que l'ensemble des représentations primitives-stables de $\mathbb{F}_n$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ forme un ouvert de propre discontinuité pour l'action de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$. De plus, il montre que cet ensemble contient strictement les représentations convexes-cocompactes, et contient en particulier des représentations non-discrètes.

2.3 Équivalence

Il n'est pas très difficile de remarquer que les représentations primitives-stables sont en particulier des représentations de Bowditch. En revanche, l'autre inclusion est bien plus difficile.

Lee et Xu d'une part (dans [LX19]), et Series indépendemment (dans [Ser20]), ont montré que l'ensemble des représentations de Bowditch et l'ensemble des représentations primitives-stables de $\mathbb{F}_2$ à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ sont égales.

On s'est intéressé au cas où le groupe G est remplacé plus généralement par un groupe d'isométries d'un espace δ-hyperbolique (géodésique, propre). Nos méthodes sont indépendantes de celles de Lee-Xu et Series pour le cas $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Théorème 2 (S. '22)**.** *Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique, propre.*

$$\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X)) = \mathcal{PS}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$$

Il n'est pas dur de montrer que les représentations primitives-stables forment un ouvert de propre-discontinuité de $\chi(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$. On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 3. *L'ensemble $\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, X)$ est un ouvert de propre-discontinuité pour l'action de* $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_2)$ *sur* $\chi(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$.

References

[Bow98] B.H. Bowditch. "Markoff triples and quasifuchsian groups". en. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 77.3 (Nov. 1998), pp. 697–736.

[LX19] Jaejeong Lee and Binbin Xu. "Bowditch's Q-conditions and Minsky's primitive stability". en. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 373.2 (Oct. 2019), pp. 1265–1305.

[Min13] Yair N. Minsky. "On dynamics of Out(F_n) on PSL(2,C) characters". en. In: *Israel J. Math.* 193 (2013), pp. 47–70.

[Ser20] Caroline Series. "Primitive stability and the Bowditch conditions revisited". en. In: *arXiv:2006.10403 [math]* (June 2020).

[TWZ08] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, and Ying Zhang. "Generalized Markoff maps and McShane's identity". en. In: *Advances in Mathematics* 217.2 (Jan. 2008), pp. 761–813.