# Ensembles K-spectraux et inégalités de type Kreiss

Maëva Ostermann [1]

[1] *Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, maeva.ostermann@gmail.com*

**Résumé.** Introduits par von Neumann en 1951, les ensembles K-spectraux permettent d'estimer la norme des fonctions de matrices grâce au supremum de ces fonctions. Au cours de cet exposé, je parlerai d'exemples classiques d'ensembles K-spectraux et du rôle que joue la constante de Kreiss dans l'étude des ensembles K-spectraux.
**Mots-clés.** Ensembles K-spectraux, constante de Kreiss.

**Abstract.** Introduced by von Neumann in 1951, K-spectral sets allow us to estimate the norm of the functions of matrices with the help of the sup norm of these functions. In this presentation, I will talk about classical examples of K-spectral sets and the role that the Kreiss constant plays in the study of K-spectral sets.
**Keywords.** K-spectral sets, Kreiss constant.

Estimer la norme des fonctions de matrices ou opérateurs joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines des Mathématiques pures et appliquées, tels que l'Algèbre Linéaire (numérique), l'Analyse Fonctionnelle et l'Analyse Numérique. Pour les opérateurs normaux, le spectre fournit de précieuses informations sur la norme du calcul fonctionnel. Cependant, la situation est très différente pour les opérateurs non normaux.
Introduits par von Neumann en 1951, les ensembles K-spectraux permettent d'estimer la norme des fonctions de matrices grâce au supremum de ces fonctions. Précisément, on dira qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ensemble K-spectral pour une matrice $T$ si $\sigma(T) \subset \overline{\Omega}$ et si pour toute fonction rationnelle $f$ bornée sur $\Omega$, on a

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in\Omega} |f(z)|.$$

Lorsque cette égalité est vraie pour $K = 1$, on dira simplement que $\Omega$ est un ensemble spectral pour $T$.

Un exemple très classique d'ensemble spectral est fourni par l'inégalité de von Neumann qui stipule que si une matrice $T$ est une contraction (i.e. $\|T\| \leq 1$), alors pour tout polynôme $p$, on a

$$\|p(T)\| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |p(z)|.$$

Autrement dit, $\overline{\mathbb{D}}$ est un ensemble spectral pour toute matrice de contraction (et plus généralement pour toute contraction agissant sur un espace de Hilbert). Plus généralement, on sait que $\overline{\mathbb{D}}$ est un ensemble 2-spectral pour une matrice $T$ dès que son image numérique, définie par $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$, satisfait $W(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Ce résultat est une conséquence de deux résultats: un théorème de dilatation de Berger et d'une conséquence directe d'un résultat d'Okubo et Ando.
Lorsque le disque unité est un ensemble K-spectral pour une matrice ou un opérateur $T$, il est assez simple de constater que $T$ va satisfaire deux propriétés: $T$ est à puissance bornée, c'est-à-dire $\sup_{n\geq 0} \|T^n\| < \infty$ et $T$ est Kreiss bornée, c'est-à-dire que sa constante de Kreiss, définie par

$$\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) = \sup_{|w|>1} (|w| - 1)\|(wI - T)^{-1}\|,$$

vérifie $\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) < \infty$. En 1962, Kreiss a montré que, pour une matrice, ces deux propriétés sont en fait équivalentes. Une estimation entre le suprémum des puissances et la constante de Kreiss peut être déduite de la preuve de Kreiss et celle-ci a été améliorée au cours des années qui ont suivi jusqu'à donner celle qu'on connaît sous le nom de théorème matriciel de Kreiss dû à Spijker. Cette dernière stipule que pour une matrice $T$ de taille $N \times N$, on a

$$\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) \leq \sup_{n\geq 0} \|T^n\| \leq eN\mathcal{K}_T(\mathbb{D}).$$

En 2005, Vitse a montré que, dans le cas matriciel, une matrice Kreiss bornée avait toujours le disque comme ensemble K-spectral en montrant que pour une matrice $T$ Kreiss bornée de taille $N \times N$ et pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$, on a que

$$\|f(T)\| \leq \frac{16N}{\pi}\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Mais qu'en est-il pour des domaines généraux?

Une généralisation géométrique naturelle de la constante de Kreiss pour un domaine $\Omega$ est définie par

$$\mathcal{K}_T(\Omega) = \sup_{z\notin\overline{\Omega}} dist(z, \Omega)\|(zI - T)^{-1}\|.$$

Il est facile de voir que si $\Omega$ est un ensemble K-spectral pour $T$, alors $\mathcal{K}_T(\Omega) < \infty$. Étant donné que dans le cas où $\Omega$ est un disque, cette condition implique qu'il s'agit d'un ensemble K-spectral pour la matrice $T$, il est naturel de se poser la question suivante: Sous quelle(s) condition(s) sur $\Omega$ a-t-on que pour toute matrice $T$ telle que $\mathcal{K}_T(\Omega) < \infty$, il existe une constante K telle que $\Omega$ soit K-spectral pour $T$?
Dans un papier publié en 1999, Toh et Trefethen ont obtenu des estimations sur les polynômes similaire au théorème de Kreiss mais faisant apparaître le degré des polynômes dans la majoration. Dans un article publié en 2022, j'ai obtenu une inégalité similaire à celle de Toh et Trefethen pour les fonctions rationnelles. Précisément, si $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^2$, il

existe une constante $C_\Omega$ ne dépendant que de $\Omega$ telle que pour toute fonctions rationnelles $f$ bornée sur $\Omega$, on a que

$$\|f(T)\| \leq (1 + \deg f) C_\Omega \mathcal{K}_T(\Omega) \sup_\Omega |f|.$$

Bien que cela ne permet pas de déduire que $\Omega$ est K-spectral pour une matrice $T$, une adaptation de la méthode pour pour l'obtenir permet de montrer que, sous certaines conditions supplémentaires sur $\Omega$, une inégalité de la même forme est vérifiée où le terme $(1+\deg f)$ est remplacé par la taille de la matrice. Précisément, sous certaines conditions supplémentaires sur $\Omega$, il existe une constante $\tilde{C}_\Omega$ telle que, pour toute fonction $f \in H^\infty(\Omega)$ et toutes matrices $T \in M_N(\mathbb{C})$, on a

$$\|f(T)\| \leq N \tilde{C}_\Omega \mathcal{K}_T(\Omega) \sup_\Omega |f|.$$

Je terminerai mon exposé par expliquer brièvement comment les obtenir, quelles adaptations faire pour obtenir la dernière inégalité ainsi que les contraintes sur $\Omega$ que cela donne.

# Bibliographie


C.A. Berger (1965). A strange dilation theorem, Notices Amer. Math. Soc 12, p. 590.

R. Clouâtre, M. Ostermann, T. Ransford (2023). An abstract approach to the Crouzeix conjecture, *J. Operator Theory* 90.1, pp. 209–221.

M. Crouzeix (2004). Bounds for analytical functions of matrices, *Integral Equations Operator Theory*, 48(4) :461–477.

M. Crouzeix (2007). Numerical range and functional calculus in Hilbert space, *J. Funct. Anal.*,244(2) :668–690.

M. Crouzeix, C. Palencia (2017). The numerical range is a $(1 + \sqrt{2})$-spectral set, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 38(2) :649–655.

B. Delyon, F. Delyon (1999). Generalization of von Neumann's spectral sets and integral representation of operators, *Bull. Soc. Math. France*, 127(1) :25–41.

H.-O. Kreiss (1962). Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Diffe- rentialgleichungen approximieren, *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*, 2 :153– 181.

K. Okubo, T. Ando (1975). Constants related to operators of class C$\rho$, *Manuscripta Math.*, 16(4) :385–394.

Maëva Ostermann (2022). A Kreiss type inequality for rational functions on general domains, *Complex Anal. Oper. Theory* 16.4, Paper No. 54, 24. issn: 1661-8254.

M. N. Spijker (1991). On a conjecture by LeVeque and Trefethen related to the Kreiss matrix theorem, *BIT*, 31(3) :551–555.

B. Sz.-Nagy (1953). Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 15 :87–92.

K.-C. Toh, L.N. Trefethen (1999). The Kreiss matrix theorem on a general complex domain, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21(1) :145–165.

P. Vitse (2005). Functional calculus under Kreiss type conditions, *Math. Nachr.*, 278(15) :1811–1822.

J. von Neumann (1951). Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, 4 :258–281.