

REPRÉSENTATIONS EN *STRING C-GROUPS* DES GROUPES SYMÉTRIQUES

Jessica Mulpas ¹, Julie De Saedeleer ² et Dimitri Leemans ³

¹ *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

jessica.mulpas@ulb.be

² *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

leemans.dimitri@ulb.be

³ *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

julie.de.saedeleer@ulb.be

Résumé. Les représentations en *string C-groups* sont des paires constituées d'un groupe et d'une séquence de ses générateurs (dont la longueur est appelée rang) satisfaisant certaines propriétés que nous définirons précisément. Comme nous le verrons, pour un groupe donné, ces représentations sont en correspondance directe avec les polytopes abstraits réguliers (abstractions des polytopes convexes, riches en symétries) dont le groupe en question est le groupe d'automorphismes. Déterminer une représentation en *string C-group* d'un groupe donné, c'est donc en spécifier l'action sur un objet géométrique et en déterminer une présentation.

La recherche de ces représentations des groupes symétriques a commencé en 2006, avec des avancées nettement accélérées depuis 2010, particulièrement au niveau des rangs élevés.

Nous présentons ici des manipulations possibles sur les graphes de permutations des groupes symétriques représentés comme *string C-groups* (appelés graphes CPR). Ces manipulations permettent d'obtenir de nouvelles représentations en *string C-groups* à partir de représentations connues.

Mots-clés. Polytopes abstraits réguliers, *string C-group representations*, groupes de permutations, groupes symétriques, graphes CPR

1 Prérequis

1.1 Polytopes abstraits réguliers

Un n -polytope abstrait est un ensemble partiellement ordonné (\mathcal{P}, \leq) possédant quatre propriétés (P1), (P2), (P3) and (P4) telles qu'explicitées ci-dessous. On nommera les éléments de \mathcal{P} faces. Pour deux faces F et G de \mathcal{P} tels que $F \leq G$, on définira également la section G/F comme étant l'ensemble des faces H de \mathcal{P} telles que $F \leq H \leq G$. Notons que chaque section d'un polytope abstrait est en elle-même un polytope abstrait.

(P1) \mathcal{P} a deux faces *impropres* : une plus petite face F_{-1} de rang -1 et une plus grande face F_n de rang n .

(P2) Chaque *drapeau* (à savoir sous-ensemble totalement ordonné maximal) de \mathcal{P} contient $n + 2$ faces (en incluant les deux faces impropres).

(P3) \mathcal{P} est *fortement connexe*, c'est-à-dire que chaque section de \mathcal{P} (y compris \mathcal{P} lui-même) est connexe (dans le sens donné ci-dessous).

(P4) \mathcal{P} satisfait la *condition diamant*, autrement dit : pour toute paire de faces (F, G) de \mathcal{P} telle que $F < G$ et $\text{rang}(G) = \text{rang}(F) + 2$, il y a exactement deux faces H, H' telles que $F < H < G$ et $F < H' < G$.

Un ensemble partiellement ordonné \mathcal{P} de rang d possédant les propriétés (P1) et (P2) est dit *connexe* si $d \leq 1$ ou si $d \geq 2$ et pour toutes faces propres F et G de \mathcal{P} , il existe une suite de faces propres $F = H_0, H_1, \dots, H_{k-1}, H_k = G$ telle que $H_i \leq H_{i+1}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Un polytope abstrait est dit *régulier* lorsque son groupe d'automorphismes est transitif sur ses drapeaux.

1.2 Représentations en *string C-groups*

Soit G un groupe de permutations. Une représentation en *string C-group* de rang r de G est une paire (G, S) , où $S = \{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\}$ est un ensemble d'involutions (c'est-à-dire élément d'ordre deux) génératrices de G de cardinalité r , satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(SP) La propriété *string*, à savoir que $(\rho_i \rho_j)^2 = 1_G$ pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ tels que $|i - j| \geq 2$;

(IP) La propriété d'intersection, à savoir que $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle \cap \langle \rho_j \mid j \in J \rangle = \langle \rho_k \mid k \in I \cap J \rangle$ pour tous $I, J \subseteq \{0, 1, \dots, r-1\}$.

On notera souvent G_k pour $\langle \rho_i \mid i \neq k \rangle$ et $G_{k,l}$ pour $\langle \rho_i \mid i \neq k, l \rangle$.

Comme démontré par McMullen et Schulte (2002), les représentations en *string C-group* de G sont en correspondance bijective avec les polytopes abstraits réguliers dont G est le groupe d'automorphismes. Rechercher les polytopes abstraits réguliers dont G est le groupe d'automorphismes revient donc à lister ses représentations en *string C-group*.

1.3 Graphes CPR

Tout groupe fini peut être vu comme groupe de permutations. On peut donc considérer un ensemble fini non-vide Ω (de cardinalité n) sur lequel G agit comme groupe de permutations. Lorsque G possède un ensemble d'involutions génératrices $\{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\}$, nous pouvons construire un graphe simple non-orienté possédant n sommets, un pour chaque élément de Ω , et une arête d'indice $i \in \{0, \dots, r-1\}$ entre les sommets représentant les éléments a et b de Ω lorsque $\rho_i(a) = b$ (et donc, a fortiori, $\rho_i(b) = a$).

Lorsque $(G, \{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\})$ s'avère être un *string C-group*, le graphe de représentation permutante décrit ci-dessus est appelé *graphe CPR*.

Le lemme suivant de Pellicer (2008), indiquant la forme générale d'un graphe CPR, est relativement intuitif sur base de la propriété *string* :

Lemme. *Toutes les composantes connexes du sous-graphe d'un graphe CPR \mathcal{G} induites par les arêtes de labels i et j pour $|i - j| \geq 2$ (c'est-à-dire de labels i et j où ρ_i et ρ_j commutent) sont d'une des formes suivantes: un sommet isolé, une arête isolée, une double arête isolée ou un carré alterné.*

2 De la complexité de la réduction de rang

Brooksbank et Leemans (2019) ont démontré le théorème de réduction de rang suivant, permettant d'obtenir un représentation en *string C-group* de rang $r - 1$ de tout groupe G à partir de l'une de ses représentation de rang r .

Théorème. *(Théorème de réduction de rang) Soit $(G, \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{r-1}\})$ un string C-group de rang $r \geq 4$ tel que deux générateurs adjacents ne commutent jamais. Si $\rho_2\rho_3$ a ordre impair alors $(G, \{\rho_1, \rho_0\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{r-1}\})$ est un string C-group de rang $r - 1$.*

Il apparaîtra, comme nous le verrons, que la procédure inverse d'augmentation de rang est complexe. Nous donnerons quelques exemples illustrant les difficultés qui peuvent être rencontrées et justifierons donc des hypothèses du théorème suivant, permettant d'augmenter le rang de certaines représentations en *string C-group* du groupe symétrique du rang 3 vers le rang 4.

Théorème. *Soient $n \geq 5$ et $\Gamma \cong S_n$ la représentation permutante canonique de S_n sur n points. Soit $(\Gamma, \{\rho_0, \tilde{\rho}_1, \rho_2\})$ une représentation en string C-group de rang 3 du groupe*

symétrique Γ et soit \mathcal{G} son graphe CPR. Supposons que $\tilde{\rho}_1$ n'est pas une transposition. Soit \mathcal{G}' le graphe de représentation permutante obtenu en remplaçant, dans \mathcal{G} , une arête 1 qui n'est adjacente à aucune arête 2 par une arête (-1) . Soit $(\Gamma, \{\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \rho_2\})$ le groupe représenté par \mathcal{G}' (où $\rho_{-1}\rho_1 = \tilde{\rho}_1$). Supposons que les orbites de $\Gamma_{-1,2}$ sont de tailles au plus 3 et supposons, de plus, que l'une de ces trois propositions est satisfaite :

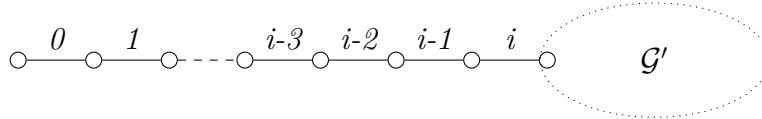
1. Γ_2 a une orbite de taille 4 et Γ_{-1} agit imprimitivement sur les composantes connexes de \mathcal{G}_{-1} qui contiennent plus d'une composante connexe de $\mathcal{G}_{-1,2}$ sur 3 sommets;
2. Γ_2 a une orbite de taille 5, ρ_0, ρ_1 et ρ_2 sont toutes des permutations paires et Γ_{-1} agit imprimitivement sur les composantes connexes de \mathcal{G}_{-1} qui contiennent plus d'une composante connexe de $\mathcal{G}_{-1,2}$ sur 3 sommets;
3. Γ_2 a une orbite de taille 6.

Alors $(\Gamma, \{\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \rho_2\})$ est une représentation en string C-group de S_n .

3 Composer deux graphes CPR pour un former un nouveau, état actuel de notre recherche

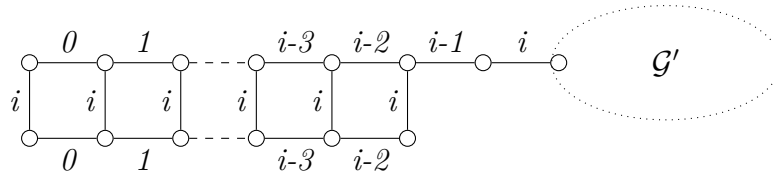
L'article de Cameron, Leemans et Fernandes (2022) propose une liste de graphes de permutations possibles pour les groupes symétriques. Leurs profils, ainsi qu'une analyse empirique à l'aide de MAGMA (Bosma, Cannon et Playoust (1997)), un logiciel de calcul compatible avec les banques de données de représentations en *string C-groups* existantes, nous ont permis de rédiger la conjecture et le théorème suivants, présentant deux manières de composer des graphes CPR entre eux :

Conjecture. Soit $i \geq 2$. Soit \mathcal{G} un graphe CPR



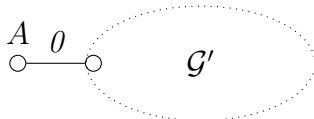
où \mathcal{G}' est un sous-graphe de \mathcal{G} qui, lorsqu'il n'est pas réduit à un seul sommet, n'a que des arêtes de labels au moins i .

Alors

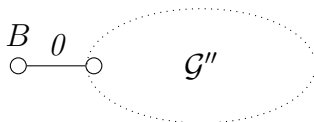


est un graphe CPR.

Théorème. *Si*

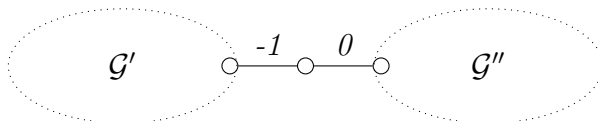


et



sont des graphes CPR tels que \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' en sont des sous-graphes dont toutes les arêtes (s'ils en ont) ont labels au moins 1.

Alors identifier A à B et relabelliser les arêtes du premier graphe en transformant tout l en $-(l + 1)$ donne un graphe CPR.



Nous donnerons quelques exemples et les grandes lignes de la démonstration de la seconde proposition.

Bibliographie

- Leemans D. et Vauthier L. (2006), *An atlas of abstract regular polytopes for small groups*, Aequationes Mathematicae, 72(3), pp.313 à 320
- McMullen P. et Schulte E. (2002), *Abstract regular polytopes*, volume 92. Cambridge University Press
- Pellicer D. (2008), *CPR graphs and regular polytopes*, European Journal of Combinatorics, 29(1), pp.59 à 71
- Brooksbank P. et Leemans D. (2019), *Rank Reduction of string C-group representation*, Proceedings of the American Mathematical Society, 147(12), pp.5421 à 5426
- Cameron P., Fernandes M.-E. et Leemans D. (2022), *The number of string C-groups of high rank*, arXiv preprint arXiv:2212.12723
- Bosma W., Cannon J. et Playoust C. (1997), *The Magma Algebra System I: the user language*, Journal of Symbolic Computation (3/4), pp. 235-265