STRUCTURES RÉELLES SUR LES SURFACES DE HOPF PRIMAIRES

ZAHRAA KHALED

Résumé. Le premier objectif est de donner une classification complète (à biholomorphismes Réels) des surfaces de Hopf primaires Réelles (H, s), et, pour chaque paire de ce type, de décrire en détail le groupe $\mathrm{Aut}_h(H, s)$ des automorphismes holomorphes Réels.

Notre deuxième objectif est la classification des surfaces de Hopf primaires Réelles à difféomorphismes équivariants, ce qui nous permettra de décrire explicitement dans chaque cas le lieu réel $H(\mathbb{R}) = H^s$ et le quotient $H/\langle s\rangle$.

Définition 0.1. *Soit V un espace vectoriel réel. Une structure presque complexe sur V est un endomorphisme $J \in \mathrm{End}(V)$, vérifiant $J^2 = -id_V$.*

Soit (V, J) un espace vectoriel réel muni d'une structure presque complexe. La multiplication $\mathbb{C} \times V \to V$ définie par

$$(x + iy).v = xv + yJ(v)$$

donne une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur V. Réciproquement, si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors l'endomorphisme $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ défini par $J(v) = iv$ définit une structure presque complexe. En conclusion

Remarque 0.2. *Soit V un espace vectoriel réel. Les données suivantes sont équivalentes :*

(1) Une structure d'espace vectoriel complexe qui étend sa structure d'espace vectoriel réel.

(2) Une structure presque complexe sur V.

Définition 0.3. *Soit M une variété différentiable réelle de dimension $2n$. Une structure presque complexe sur M est la donnée d'une application différentiable J, qui à chaque point $x \in M$ associe une structure presque complexe $J_x \in \mathrm{End}(T_xM)$. Une variété presque complexe est une paire (M, J), où J est une structure presque complexe sur M.*

La condition de différentiabilité peut être formulée de la manière suivante : une carte locale $f : U_f \to V_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ induit une famille de champs tangents $(\xi_1, ..., \xi_{2n})$ sur U_f telle que pour tout $x \in U_f$, la famille $(\xi_1(x), ..., \xi_{2n}(x))$ est une base de T_xU_f. En exprimant T_xU_f dans cette base, on obtient une matrice carrée $\mathbb{J}^f(x) \in M_{2n,2n}(\mathbb{R})$. La différentiabilité de J est équivalente à la différentiabilité de l'application

$$\mathbb{J}^f \circ f^{-1} : V_f \to M_{2n,2n}(\mathbb{R})$$

pour toute carte f de M.

Une question naturelle se pose : Soit (M, J) une variété presque complexe. Est ce que J est associée à une structure complexe (donc à un atlas maximal holomorphe) sur M ? La réponse est donnée dans le théorème fondamental suivant :

Théorème 0.4. *Soit* (M, J) *une variété presque complexe. La structure presque complexe* J *est associée à une structure complexe (donc à un atlas maximal holomorphe) sur* M *ssi le tenseur de Neijenhuis* $N_J : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ *de* J *définit par*

$$N_J(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

est nul. Dans ce cas, J *est une structure presque complexe intégrable.*

Ici on a noté par $\chi(M)$ l'espace des champs tangents sur M, i.e. l'espace des sections du fibré tangent $T_M \to M$.

Réciproquement, on a :

Toute variété complexe (X, A) où A est un atlas holomorphe maximal sur X est naturellement munie d'une structure presque complexe sur X. En effet, soient $x \in X$ et $f : U_f \to V_f \in A$ une carte de X tel que $x \in U_f$. L'application tangente $f_{*x} : T_xX \to \mathbb{C}^n$ induit une structure d'espace vectoriel complexe (donc une structure presque complexe) sur T_xX qui ne dépend pas de choix de f.

Définition 0.5. *Soient* X*,* X' *deux variétés complexes, et* J*,* J' *les structures presque complexes associées.*

(1) *Une application* $\phi : X \to X'$ *est dite holomorphe si* $\forall x \in X$ *et* $\forall v \in T_xX$*, on a* $\phi_*(J(v)) = J'(\phi_*(v))$*.*
(2) *Une application* $\phi : X \to X'$ *est dite anti-holomorphe si* $\forall x \in X$ *et* $\forall v \in T_xX$*, on a* $\phi_*(J(v)) = -J'(\phi_*(v))$*.*

Soit X une variété complexe, et soit J la structure presque complexe holomorphe (intégrable) sur sa variété différentiable sous-jacente X, définissant sa structure complexe. On va noter par $\bar{X}$ la variété complexe définie par $-J$. Remarquons que la donnée d'un isomorphisme anti-holomorphe $X \to X$ est équivalente à la donnée d'un biholomorphisme $X \to \bar{X}$.

On introduit maintenant la notion fondamentale de cette présentation :

Définition 0.6. *Une structure Réelle sur* X *est une involution anti-holomorphe sur* X*. Une variété complexe Réelle est une paire* (X, s) *composée d'une variété complexe et d'une structure Réelle sur celle-ci.*

Le lieu réel d'une variété complexe Réelle (X, s) *est simplement le lieu fixe* $X^s = \{x \in X / s(x) = x\}$ *de sa structure Réelle.*

Exemple 0.1. *Comme exemples des variétés complexes Réelles, on a*

(1) $\mathbb{C}^n$ *muni de la conjugaison complexe* c*.*
(2) *Pour la droite projective complexe* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$*, nous avons deux classes d'isomorphismes :*
    (a) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *muni de la structure Réelle standard* $\phi : [Z_0, Z_1] \to [\overline{Z}_0, \overline{Z}_1]$*, donc* $X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *est un cercle.*
    (b) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *muni de la structure Réelle quaternionique* $\phi : [Z_0, Z_1] \to [-\overline{Z}_1, \overline{Z}_0]$*, donc* $X(\mathbb{R}) = \varnothing$*.*

Définition 0.7. *Soient* (X, s)*,* (Y, σ) *deux variétés complexes Réelles. Un isomorphisme* $(X, s) \to (Y, \sigma)$ *est un biholomorphisme* $g : X \to Y$ *qui est compatible avec la paire* (s, σ)*, i.e. tel que* $\sigma \circ g = g \circ s$*.*

Le problème fondamental de la théorie est la classification des variétés complexes Réelles à biholomorphismes Réels.

Le groupe des biholomorphismes Réels d'une variété complexe Réelle (X, s) est le sous-groupe

$$\mathrm{Aut}(X, s) := \{f : X \to X | \ f \text{ est un biholomorphisme et } f \circ s = s \circ f\}$$

du groupe de biholomorphismes $\mathrm{Aut}_h(X)$.

Les objectifs de cette présentation sont les suivants :

(O1) Donner une classification complète des surfaces de Hopf primaires Réelles (à biholomorphismes Réels) avec une description explicite de l'ensemble des classes d'isomorphismes.

(O2) Décrire explicitement, pour toute surface de Hopf primaire Réelle (H, s), son groupe des automorphismes holomorphes Réels $\mathrm{Aut}(H, s) \subset \mathrm{Aut}_h(H)$.

(O3) Classifier topologiquement les surfaces de Hopf primaires Réelles et, pour toute surface de Hopf primaire Réelle (H, s), décrire explicitement le lieu des points fixes (réels) H^s et le quotient $H/\langle s\rangle$.

Pour (O1), rappelons tout d'abord que [BHPV] :

Définition 0.8. *Une surface de Hopf primaire est une surface complexe compacte H dont le revêtement universel est biholomorphe à $W \coloneqq \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ et dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

D'après un théorème fondamental de Kodaira [Ko1], il en résulte que toute surface de Hopf primaire est biholomorphe à $W/\langle f\rangle$ où f est un biholomorphisme de la forme

$$f(z, w) = (\alpha z + \lambda w^n, \beta w)$$

où

$$0 < |\alpha| \leqslant |\beta| < 1,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda(\alpha - \beta^n) = 0.$$

Si les coefficients de f sont réels, la conjugaison standard $c : W \to W$ induit évidemment une structure Réelle sur H_f. Nous verrons qu'il existe des classes intéressantes des surfaces de Hopf primaires Réelles qui ne sont pas de ce type. De plus, il existe des surfaces de Hopf primaires Réelles définies par des contractions holomorphes f dont les coefficients ne sont pas réels.

Remarquons tout d'abord que le théorème de Kodaira ne donne pas une classification précise des surfaces de Hopf primaires, car il n'est pas clair sous quelles conditions les surfaces associées à deux 4-uplets $(\alpha, \beta, \lambda, n)$, $(\alpha', \beta', \lambda', n')$ comme ci-dessus sont biholomorphes.

D'après [We], nous introduisons cinq classes de contractions holomorphes :

$$\begin{aligned}
IV &\coloneqq \left\{ f : W \to W \middle|\ f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix} \middle|\ 0 < |\alpha| < 1 \right\}, \\
III &\coloneqq \left\{ f : W \to W \middle|\ f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^r z \\ \delta w \end{pmatrix} \middle|\ r \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ 0 < |\delta| < 1 \right\}, \\
II_a &\coloneqq \left\{ f : W \to W \middle|\ f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^r z + w^r \\ \delta w \end{pmatrix} \middle|\ r \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ 0 < |\delta| < 1 \right\}, \\
II_b &\coloneqq \left\{ f : W \to W \middle|\ f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + w \\ \alpha w \end{pmatrix} \middle|\ 0 < |\alpha| < 1 \right\}, \\
II_c &\coloneqq \left\{ f : W \to W \middle|\ f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \delta w \end{pmatrix} \middle|\ \begin{matrix} 0 < |\alpha| < 1 \\ 0 < |\delta| < 1 \end{matrix},\ \alpha \neq \delta^r\ \forall r \in \mathbb{N} \right\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

L'application

$$IV \cup III \cup II_a \cup II_b \cup II_c \ni f \mapsto [H_f] \tag{2}$$

qui associe à une contraction holomorphe f la classe de biholomorphisme de la surface de Hopf correspondante H_f est surjective, mais *pas* injective. En effet, les contractions f, $f' \in II_c$ associées aux paires (α, δ), $(\alpha', \delta') = (\delta, \alpha)$ sont biholomorphes. Notez que cette exception à l'injectivité n'est pas mentionnée dans [We]. En fait, dans [We], la classe II_c est définie en imposant la condition $|\alpha| < |\delta|$.

Malheureusement, avec cette définition restrictive de II_c, *on perd la surjectivité de l'application* (2), car les types de biholomorphismes des surfaces de Hopf associées aux paires (α, δ) satisfaisant

$$0 < |\alpha| = |\delta| < 1, \ \alpha \neq \delta^r \ \forall r \in \mathbb{N} \tag{3}$$

n'appartiennent pas à son image. Cette remarque est importante pour nos buts, car c'est précisément dans la sous-classe de II_c définie dans (3) - la sous-classe omise dans [We] - que nous trouverons des contractions f pour lesquelles H_f admet des structures Réelles bien que les coefficients de f ne sont *pas* réels.

Notre première étape dans la classification des structures Réelles sur les surfaces de Hopf primaires est de les diviser en deux classes : une structure Réelle ϕ sur H_f sera appelée *paire* (*impaire*) si elle admet un relevé $\hat{\phi} : W \to W$ tel que $\phi^2 = \mathrm{id}_W$ (respectivement $\phi^2 = f$).

En ce qui concerne (O2), nous donnerons des descriptions explicites du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(X, s)$ de toutes les surfaces de Hopf primaires Réelles. Par exemple, lorsque $f \in IV$ avec un coefficient négatif α, nous obtenons $\mathrm{Aut}(H_f, \mathfrak{s}_f) \simeq \mathrm{Spin}^c(3)$, où $\mathfrak{s}_f$ désigne la structure Réelle impaire canonique sur H_f.

Nos résultats pour l'objectif (O3) donnent une classification différentielle complète des surfaces de Hopf primaires Réelles. Le résultat final est le suivant :

— Toute surface de Hopf primaire Réelle paire (X, s) est difféomorphe d'une manière équivariante soit à

$$\big(S^1 \times S^3, (\zeta, (u, v)) \mapsto (\zeta, (\bar{u}, \bar{v}))\big),$$

soit à

$$\big(S^1 \times S^3, (\zeta, (u, v)) \mapsto (\zeta, (\bar{u}, \zeta\bar{v}))\big).$$

— Toute surface de Hopf primaire Réelle impaire (X, s) est difféomorphe d'une manière équivariante à

$$\big(S^1 \times S^3, (\zeta, Z) \mapsto (-\zeta, Z)\big).$$

L'idée principale de la démonstration de ce résultat de classification est la suivante : pour une contraction $f \in IV \cup III \cup II_a \cup II_b \cup II_c$ avec des coefficients réels et des coefficients diagonaux positifs, nous construisons un groupe de difféomorphismes à 1-paramètre $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de W agissant librement sur W de telle sorte que $f = f^1$. De plus, nous construisons également une sous-variété compacte $\Sigma \subset W$ de dimension 3 qui est transversale aux trajectoires de ce groupe et peut être identifiée à S^3 via un difféomorphisme qui commute avec la conjugaison et les involutions $(z, w) \mapsto (\pm z, \pm w)$.

Enfin, nous montrons que :

— Le lieu réel X^s d'une surface de Hopf primaire Réelle paire (X, s) est soit un tore, soit une bouteille de Klein, tandis que le lieu réel d'une surface de Hopf primaire Réelle impaire est toujours vide.

— Le quotient $X/\langle s\rangle$ associé à une surface de Hopf primaire Réelle (X, s) est toujours homéomorphe à $S^1 \times S^3$, et nous décrivons la position du lieu des points fixes X^s dans ce quotient.

D'après le théorème équivariante de la tranche, pour toute surface complexe Réelle (X, s), le quotient $X/\langle s\rangle$ est une variété topologique de dimension 4.

Références

[At] M. Atiyah, *K-theory*, W.A. Benjamin, New York (1967).

[BHPV] W. Barth, K. Hulek, Ch. Peters, A. Van de Ven : *Compact Complex Surfaces*, Springer (2004).

[GH] B. Gross and J. Harris, Real algebraic curves, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série 14, 157–182 (1981).

[Ko1] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces. Americain Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press, 88 (3), 682-721 (1966).

[OT] Ch. Okonek, A. Teleman, Abelian Yang-Mills Theory on Real Tori and Theta Divisors of Klein Surfaces, Commun. Math. Phys. 323, 813–858 (2013).

[S] R. Silhol : Real Algebraic Surfaces, Lecture Notes in Math. 1392, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[Te] A. Teleman, Non-Kählerian compact complex surfaces, In : Angella, D., Arosio, L., Di Nezza, E. (eds) Complex Non-Kähler Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol 2246 (2019), Springer, Cham.

[TTD] Tammo tom Dieck, Transformation Groups, de Gruyter, Berlin-New York (1987).

[We] J. Wehler, Versal deformation of Hopf surfaces, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 328, 22-32 (1981).

Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France.
Email address: `zahraa.khaled@univ-amu.fr`