Une inégalité isosystolique pour les tores de Finsler réversibles et l'aire de Busemann-Hausdorff

Florent Balacheff [1] & Teo Gil Moreno de Mora Sardà [2]

[1] *Departament de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Espagne*
`florent.balacheff@uab.cat`

[2] *Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Université Paris-Est Créteil, 61 avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil, France*
`teo.gil-moreno-de-mora-i-sarda@u-pec.fr`

Résumé. En 1949, Loewner prouva une célèbre inégalité : la systole de tout tore riemannien de dimension 2 est controlée par son aire. La généralisation de cette inégalité au cadre de la géométrie de Finsler conduit à une grande variété de résultats. Dans cet exposé je présenterai les différentes inégalités isosystoliques connues pour les tores de Finsler bidimensionnels impliquant les deux principales notions d'aire en géométrie de Finsler : l'aire de Busemann-Hausdorff et l'aire de Holmes-Thompson. Je compléterai également le tableau en présentant une nouvelle inégalité isosystolique pour les tores de Finlser réversibles et pour l'aire de Busemann-Hausdorff.

Mots-clés. Aire de Busemann-Hausdorff, aire de Holmes-Thompson, inégalité isosystolique, métrique de Finsler, systole.

Abstract. In 1949, Loewner discovered a much celebrated inequality: the systole of any Riemannian torus of dimension 2 is controlled by its area. The generalization of this inequality to the Finsler framework results in a wide variety of results. In this talk I will survey the different known isosystolic inequalities on two-dimensional Finsler tori involving the two main notions of area in Finsler geometry: the Busemann-Hausdorff area and the Holmes-Thompson area. I will also complete the picture by presenting a new isosystolic inequality on reversible Finsler 2-tori for the Busemann-Hausdorff area.

Keywords. Busemann-Hausdorff area, Holmes-Thompson area, isosystolic inequality, Finsler metric, systole.

1 L'inégalité de Loewner

Soit Σ une surface fermée et non simplement connexe munie d'une métrique riemannienne g. La systole de Σ désigne la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile, et on la note par $\operatorname{sys}(\Sigma, g)$.

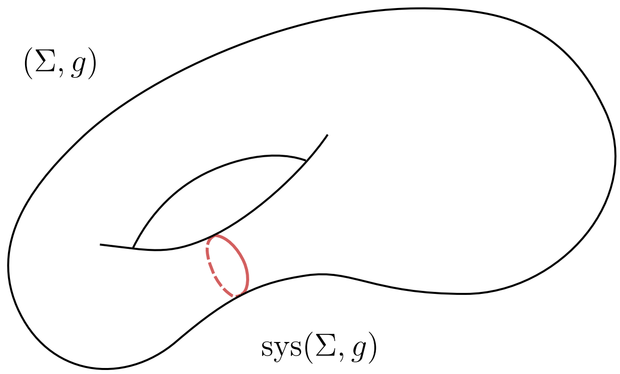

Figure 1: La systole sur une surface (Σ, g) (d'un tore, plus précisement).

Loewner en 1949 (non publié, voir [Gromov 1996] pour une preuve) démontra une propriété des tores riemanniens : la systole de tout tore riemannien $(\mathbb{T}^2, g)$ est toujours controlée par son aire $A(\mathbb{T}^2, g)$. Plus précisement, il prouva que pour toute métrique g sur $\mathbb{T}^2$

$$\mathrm{A}(\mathbb{T}^2, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sys}^2(\mathbb{T}^2, g), \tag{1}$$

où l'on a égalité si et seulement si $(\mathbb{T}^2, g)$ est un tore plat obtenu comme le quotient du plan euclidien par un réseau hexagonal.

Cette inégalité fut le premier exemple d'inégalité isosystolique (que l'on peut interpreter comme une borne inferieure strictement positive pour le quotient $\mathrm{A} / \operatorname{sys}^2$, souvent appellé aire systolique), et donna naissance à la géométrie systolique, qui vise à généraliser ce type d'inégalités. Une possibilité consiste à étudier si une inégalité de ce type existe lorsque l'on considère une classe plus large de métriques sur le tore, plus précisement, les métriques de Finsler sur $\mathbb{T}^2$.

2 Métriques de Finsler

Rappelons qu'une métrique de Finsler F sur $\mathbb{T}^2$ est la donnée d'une norme[1] $\|\cdot\|_x$ sur chaque espace tangent $T_x\mathbb{T}^2$, de la même façon qu'une métrique riemannienne le munit

[1]Contrairement à la convention standard, nous entendons par norme une fonction positive en dehors de l'origine, convexe et positivement homogène, et nous n'exigeons donc pas qu'elle soit symétrique.

d'un produit scalaire. Lorsque chacune de ces normes $\|\cdot\|_x$ est symmétrique, on dira que F est réversible.

Comme on pouvait s'y attendre, une métrique de Finsler F continue d'être un objet de nature géométrique. Notamment, elle nous permet de mesurer des longueurs de courbes, et en particulier induit de manière naturelle une notion de systole $\mathrm{sys}(\mathbb{T}^2, F)$. D'autre part, et contrairement au cas riemannien, il n'existe pas de notion d'aire canonique pour les surfaces de Finsler. Nous nous intéresserons à deux des notions d'aire les plus utilisées en géométrie de Finsler : l'aire de Busemann-Hausdorff (qui coincide avec la mesure de Hausdorff dans le cas réversible) et l'aire de Holmes-Thompson (liée au volume de Liouville), que l'on note respectivement A_{BH} et A_{HT}.

3 Inégalités isosystoliques pour les tores de Finsler

Nous nous intéressons donc à la question suivante : pour une certaine classe $\mathcal{F}$ de métriques de Finsler sur le $\mathbb{T}^2$, existe-t-il une constante positive C telle que pour toute métrique F dans $\mathcal{F}$ l'aire systolique vérifie l'inégalité isosystolique suivante

$$\frac{A_*}{\mathrm{sys}^2}(\mathbb{T}^2, F) \geq C \tag{2}$$

où $* = \mathrm{BH}$ ou HT?

Si on a égalité pour une certaine métrique de Finsler dans $\mathcal{F}$, alors on dit que l'inégalité isosystolique est optimale. Si une telle C n'existe pas, on dit que la classe de métriques $\mathcal{F}$ est systoliquement souple. $\mathcal{F}$ pourrait être, par exemple, la classe de métriques de Finsler réversibles sur $\mathbb{T}^2$, ou encore la classe de métriques plates.

Table 1: Constantes isosystoliques optimales pour des différentes classes de métriques de Finsler.

	Réversibles	Possiblement non réversibles
Métriques riemanniennes	Loewner 1949 (non publ.) $\sqrt{3}/2$	$\times$
Métriques Finsler A_{BH}	Ouvert ?	Souplesse systolique 0
Métriques Finsler A_{HT}	[Sabourau 2010] $2/\pi$	[Alvarez - Balacheff - Tzanev 2016] $3/2\pi$

La Table 1 résume les constantes optimales connues pour certaines classes de métriques. Chacune des trois inégalités isystoliques presentées est en fait obtenue par réduction au cas plat, où l'inégalité était préalablement connue.

Nous complétons ensuite le tableau avec le résultat suivant.

Theorem 1 ([Balacheff - S 2023]) *Soit F une métrique de Finsler réversible sur $\mathbb{T}^2$. Alors on a l'inégalité isosystolique optimale suivante:*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{BH}}\,(\mathbb{T}^2, F) \geq \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sys}^2(\mathbb{T}^2, F) \tag{3}$$

pour laquelle on a égalité si $(\mathbb{T}^2, F)$ est obtenu comme le quotient de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ par l'action par des translations de $\mathbb{Z}^2$.

Bibliographie

[Alvarez - Balacheff - Tzanev 2016] J.C. Alvarez Paiva, F. Balacheff and K. Tzanev: *Isosystolic inequalities for optical hypersurfaces*. Advances in Mathematics **301** (2016), 934-972.

[Balacheff - S 2023] F. Balacheff and T. G. M. M. Sardà: *Isosystolic inequalities on Finsler 2-tori*. *arXiv* preprint (2023) arXiv:2201.05010v2

[Gromov 1996] M. Gromov: *Systoles and intersystolic inequalities*. Seminaires et Congrès, Soc. Math. France **1** (1996), 291-362.

[Sabourau 2010] S. Sabourau: *Local extremality of the Calabi-Croke sphere for the length of the shortest closed geodesic*. Journal of the London Math. Soc. **82** (2010), 549-562.