Autour du problème du sous-espace invariant

Noémie Fougnies (Université de Mons)

Résumé Ayant commencé ma thèse cette année académique 2023-2024, j'aborderai principalement lors de cet exposé les travaux que j'ai effectués durant mon mémoire de Master. Ce dernier concerne le problème du sous-espace invariant. C'est un problème bien connu en théorie des opérateurs. Il s'énonce de la manière suivante : si X est un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie réflexif, un opérateur linéaire borné T défini sur X possède-t-il toujours un sous-espace fermé invariant non trivial ? Rappelons qu'un sous-espace M est dit invariant pour un opérateur T si $T(M) \subseteq M$. De plus, on dit qu'il est non trivial si $M \neq \{0\}$ et si $M \neq X$. Notons que si X est un espace non séparable ou de dimension finie plus grande ou égale à deux, il existe pour chaque opérateur T linéaire borné défini sur X, un sous-espace invariant fermé non trivial. De plus, on sait qu'il existe des opérateurs étant définis sur des espaces non réflexifs et ne possédant aucun sous-espace invariant fermé non trivial. C'est par exemple le cas pour l'espace ℓ^1 ([2]). Le problème actuel se restreint donc à l'énoncé ci-dessus.

Un des résultats les plus importants concernant le problème du sous-espace invariant est le théorème de Lomonosov. Celui-ci affirme que s'il existe un opérateur compact non nul commutant avec un opérateur linéaire borné T, alors ce dernier possède un sous-espace fermé hyperinvariant non trivial. On dit d'un sous-espace qu'il est hyperinvariant pour un opérateur T s'il est invariant pour tous les opérateurs commutant avec T. Ce théorème a été démontré par Lomonosov en 1973 ([1]). Ce résultat a été un grand tournant dans l'histoire du problème du sous-espace invariant. Il a permis d'introduire une nouvelle technique de preuve basée sur un théorème de point fixe : le théorème du point fixe de Schauder. Il a également amené un grand nombre d'extensions dont les preuves reposent sur des méthodes similaires.

Dans cet exposé, nous abordons également une nouvelle question proche du problème classique du sous-espace invariant. Elle concerne les sous-espaces presque invariants. Tout d'abord, on dit qu'un sous-espace M est presque invariant pour T s'il existe un opérateur F de rang fini tel que M est invariant pour $T + F$. L'idée de ce nouveau problème est de laisser plus de liberté au problème classique du sous-espace invariant. Cette liberté implique assez facilement que tout sous-espace de dimension finie ou de codimension finie est presque invariant. On peut cependant se demander si tout opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach complexe de dimension infinie possède un sous-espace presque invariant

qui soit à la fois de dimension et de codimension infinies. Ce problème a été résolu par Tcaciuc en 2019 ([3]). La preuve de ce résultat se découpe en trois parties. Le théorème est d'abord démontré dans le cas où $\partial\sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$ est non vide et ensuite dans le cas où $\partial\sigma(T^*)\backslash\sigma_p(T^*)$ est non vide. La preuve se conclut avec le cas où on suppose que $\sigma(T)$ et $\sigma(T^*)$ ne possèdent que des valeurs propres.

Durant ma thèse, un des objectifs est d'essayer d'étendre le résultat obtenu par Tcaciuc aux espaces de Fréchet. Pour rappel, les espaces de Fréchet généralisent les espaces de Banach en permettant à la topologie d'être induite par une suite de seminormes et pas juste par une unique norme. Étant donné que les preuves de Tcaciuc reposent sur des arguments de théorie spectrale qui ne passent pas aux espaces de Fréchet, il ne sera pas immédiat d'obtenir cette extension.

Mots clés Sous-espace invariant, Analyse fonctionnelle, Théorie des opérateurs, Espace de Banach complexe

References

[1] V. J. Lomonosov. "Invariant subspaces for operators commuting with compact operators". In: *Functional Analysis and Its Applications* 7 (1973), pp. 55–56.

[2] C. J. Read. "A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1". In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 17 (1985), pp. 305–317.

[3] A. Tcaciuc. "The invariant subspace problem for rank-one perturbations". In: *Duke Mathematical Journal* 168 (2019), pp. 1539–1550.