Équivalence orbitale quantitative

Amandine Escalier[1]

[1] *Institut de Mathématique d'Orsay*
Bâtiment 307
Faculté des Sciences d'Orsay
Université Paris-Saclay
F-91405 Orsay Cedex
France
amandine.escalier@universite-paris-saclay.fr

Résumé. On dit que deux groupes sont orbitalement équivalents si tous deux agissent sur un même espace de probabilité en partageant les mêmes orbites. Un célèbre résultat d'Ornstein et Weiss stipule que tout groupe moyennable infini, de type fini est orbitalement équivalent à $\mathbb{Z}$. Autrement dit : l'équivalence orbitale ne tient pas compte de la géométrie des groupes. C'est pourquoi dans un récent article Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera proposent d'affiner cette relation avec une version quantitative de l'équivalence orbitale. Ils obtiennent en outre des obstructions à l'existence de telles équivalences à l'aide du profil isopérimétrique.

Après avoir présenté la version quantitative de l'équivalence orbitale, nous nous intéresserons dans cet exposé au problème inverse de la quantification, à savoir : peut-on trouver un groupe qui est orbitalement équivalent à un groupe prescrit avec quantification prescrite ? Nous proposerons une réponse dans le cas d'une équivalence orbitale avec Z et discuterons l'optimalité des résultats.

Mots-clés. Théorie mesurée des groupes, théorie géométrique des groupes, théorie ergodique, dynamique, équivalence orbitale, profil isopérimétrique, groupes d'allumeurs de réverbères.

Abstract. We say that two groups are orbit equivalent if they both act on a same probability space with the same orbits. A famous result of Ornstein and Weiss states that all infinite amenable groups are orbit equivalent to $\mathbb{Z}$. In other words : orbit equivalence does not take into account the geometry of groups. For this reason Delabie, Koivisto, Le Maître and Tessera offer in a recent article to refine this relations with a quantitative version of orbit equivalence. They obtain obstructions to the existence of such equivalence using isoperimetric profile.

After defining the quantitative version of orbit equivalence we will focus in this talk on the "inverse problem", namely : can we find a group that is orbit equivalent to a prescribed group with prescribed quantification ? We will answer this question in the case of a prescribed equivalence with $\mathbb{Z}$ and discuss the optimality of the results.

Keywords. Measured group theory, geometric group theory, ergodic theory, dynamics, orbit equivalence, isoperimetric profile, lamplighter group.

Dans cet exposé, nous étudierons les liens entre la géométrie des groupes et leur comportement du point de vue de la dynamique mesurée et plus spécifiquement d'une notion d'équivalence appelée équivalence orbitale. Les résultats présentés sont ceux démontrés dans Escalier (2022).

1 Équivalence orbitale

Nous étudions ici une notion de théorie ergodique appelée *équivalence orbitale*. Cette notion s'intéresse à la structure des orbites sous l'action d'un groupe donnée, plus précisément à la *partition* en orbite de l'espace sur lequel un groupe agit.

Pour le dire plus formellement, deux groupes de type fini G et H sont dits **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de probabilité (X, μ) et des actions libres de G et H sur X préservant la mesure qui ont les mêmes orbites, *i.e.* telles que pour presque tout $x \in X$ on ait $G \cdot x = H \cdot x$.

Les exemples auxquels nous nous intéressons dans cet exposés font partie de la famille des groupes dits *moyennables*.

Le cas des groupes moyennable On dira qu'un groupe de type fini G engendré par une partie finie S est **moyennable** s'il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de G tels que la proportion d'éléments au bord [1] de F_n tend vers 0, *ie.* $\lim_{n\to+\infty} |\partial_S F_n|/|F_n| = 0$. On dit alors que $(F_n)_n$ est une **suite de Følner**. On peut par exemple penser à la suite d'intervalles $F_n := [0, n]$ dans $\mathbb{Z}$.

Il existe de nombreuses autres définitions équivalentes de la moyennabilité, mais ce qui est important ici n'est pas tant la définition de cette notion que la **diversité** géométrique de la famille des groupes moyennables infinis. Par exemple, on y trouve aussi bien des groupes à croissances polynomiales — tels que $\mathbb{Z}^d$ ou le groupe de Heisenberg — que des groupes à croissance exponentielle — comme par exemple les groupes d'allumeur de réverbères.

À l'inverse, du point de vue de l'équivalence orbitale, cette famille se compose d'une et une seule classe d'équivalence. En effet un célèbre théorème d'Ornstein et Weiss (1987) stipule que tout groupe infini moyennable est orbitalement équivalent au groupe des entiers. Ainsi la relation d'équivalence orbitale ne distingue-t-elle pas les groupes moyennables : cette relation n'est pas sensible à la géométrie. Il est dès lors naturel de se demander si l'on peut *affiner* cette relation afin de *distinguer* les groupes moyennables.

1. Le bord relativement à la partie génératrice S est $\partial_S F_n = \{x \in F_n \mid \exists s \in S,\ sx \notin F_n\}$.

2 Quantification et géométrie

Lorsque deux groupes agissent sur un même espace X avec les mêmes orbites nous pouvons, en menant le niveau d'étude un peu plus loin, comparer ces deux groupes : en comparant la manière qu'ils ont d'agir à l'*intérieur* d'une même orbite nous pouvons faire un lien entre leurs géométries respectives. C'est ce que l'on dénomme « équivalence orbitale quantitative ».

Équivalence orbitale quantitative Pour formaliser cette quantification on munit d'une **distance** l'espace sur lesquels nos groupes agissent. Ainsi, étant donné un groupe de type fini $G = \langle S_G \rangle$ agissant sur un espace X, on définit le **graphe de Schreier** associé à l'action comme étant le graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes sont données par $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X,\ s \in S_G\}$. Deux exemples sont représentés en figure 1. Un autre exemple classique est donné par le graphe de Cayley de G : c'est le graphe de Schreier correspondant à l'action de G sur lui même par translation. En munissant le graphe de Schreier de la distance usuelle fixant à 1 la longueur d'une arête on obtient donc une distance sur X notée d_{S_G}. De cette manière l'information *dynamique* donnée par l'action est traduite en une information *géométrique* : la représentation de l'action sous forme de graphe.

Si $G = \langle S_G \rangle$ et $H = \langle S_H \rangle$ sont orbitalement équivalents nous pouvons alors considérer les graphes de Schreier (X, S_G) et (X, S_H) associés à chacune des actions. L'idée derrière la quantification est la suivante : si un générateur h de H agit sur un sommet x, alors $h \cdot x$ sera un voisin de x dans (X, S_H) (par définition de (X, S_H)). En revanche, dans (X, S_G) la distance entre ces deux mêmes sommets peut-être plus grande (cf. figure 1).

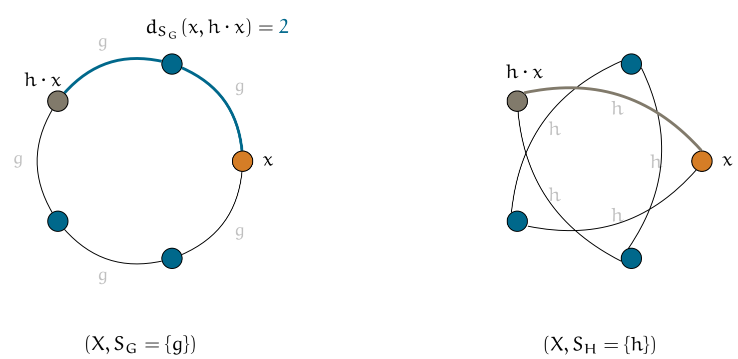

FIGURE 1 – Graphes de Schreier et comparaison de distances

C'est l'étude de cette distance qui va nous permettre de quantifier l'équivalence orbitale. Lorsque G et H sont orbitalement équivalents, ces distances sont à valeurs finies. Pour affiner cette relation on considère les *applications* distances données par $x \mapsto d_{S_G}(x, h \cdot x)$ où $h \in S_H$ et $x \mapsto d_{S_H}(x, g \cdot x)$ où $g \in S_G$ et cherchons à quantifier leur intégrabilité. C'est ainsi qu'apparaît une première notion d'équivalence orbitale quantitative : lorsque les deux applications distances sont dans L^p, on dit que l'équivalence orbitale est **$\mathbf{L^p}$-intégrable**.

Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera (2020) étendent cette notion de quantification à un plus large panel d'intégrabilités.

Soient G et H deux groupes de types finis orbitalement équivalents sur un espace de probabilité (X, μ) et $\varphi, \psi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ deux fonctions croissantes non-bornées. On dit que l'équivalence orbitale est (φ, ψ)**-intégrable** si pour tout $g \in S_G$ et tout $h \in S_H$

$$\int_X \varphi\left(d_{S_H}(x, g \cdot x)\right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \qquad \int_X \psi\left(d_{S_G}(x, h \cdot x)\right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Par exemple, Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera (2020) montrent que pour tout $n \geq 2$, le groupe d'allumeur de réverbères $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ et le groupe de Baumslag-Solitar $BS(1, n)$ admette une équivalence orbitale $(L^\infty, \exp)$-intégrable. Autrement dit : nous avons ici deux groupes géométriquement très proches qui produisent une équivalence orbitale à l'intégrabilité excellente. Ceci est une première illustration du bon comportement de l'équivalence orbitale quantitative vis-à-vis de la géométrie. Mais ceci se traduit aussi à travers d'autres résultats, par exemple la monotonie du profil isopérimétrique.

Profil Isopérimétrique Rappelons que le but originel était de rendre l'équivalence orbitale sensible à la géométrie. Un exemple d'un telle sensibilité est donné par l'étude du comportement du profil isopérimétrique. Le **profil isopérimétrique** d'un groupe $G = \langle S \rangle$, noté I_G, est défini comme

$$I_G(n) := \sup_{|A| \leq n} |A| / |\partial_S A|.$$

Delabie, Koivisto, le Maître et Tessera (2020) montrent que s'il existe une équivalence orbitale (φ, L^0)-intégrable de G vers H et si φ et $x \mapsto x/\varphi(x)$ sont croissantes alors $\varphi \circ I_H \preceq I_G$.

Ainsi, l'équivalence orbitale quantitative est sensible à la donnée géométrique qu'est le profil isopérimétrique : si les profils de nos deux groupes sont très différents alors l'intégrabilité ne peut être excellente. En particulier, dès lors que les profils de nos deux groupes G et H sont connus, nous disposons d'une borne supérieure à l'intégrabilité possible d'une équivalence orbitale entre G et H.

Par exemple, le profil isopérimétrique de $\mathbb{Z}$ vérifie $I_{\mathbb{Z}}(x) \simeq x$ et celui de $\mathbb{Z}^2$ vérifie $I_{\mathbb{Z}^2}(x) \simeq x^{1/2}$. Ainsi le théorème précédent nous dit que toute équivalence orbitale (φ, L^0)-intégrable de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{Z}$ doit vérifier $\varphi(x) \preceq x^{1/2}$. Plus généralement, si l'on a une équivalence orbitale (φ, L^0)-intégrable d'un groupe G vers $\mathbb{Z}$ alors φ doit croître moins vite que I_G.

Delabie et al. (2020) posent ainsi la question suivante : existe-t-il un groupe G tel que l'on ait une équivalence orbitale (I_G, L^0)-intégrable de G vers $\mathbb{Z}$?

3 Problème inverse

Le problème au cœur des résultats présentés ici est le problème dit « inverse » de la quantification c'est à dire : étant donnés un groupe H et une fonction croissante φ, existe-t-il un groupe G admettant un couplage (φ, L^0)-intégrable avec H ? Autrement dit, peut-on *prescrire* le degré de ressemblance des deux actions ? Enfin, le théorème sur les profils isopérimétrique susmentionné soulève la question de l'optimalité suivante :

Existe-t-il un groupe G admettant un couplage (φ, L^0)-intégrable avec H et vérifiant $I_G = \varphi \circ I_H$?

Nous proposons dans cet exposé de répondre au problème inverse dans le cadre d'équivalence avec le groupe des entiers en présentant le résultat suivant. Notons que l'équivalence orbitale donnée par ce théorème est optimale (à un facteur logarithmique près).

Théorème [Escalier (2022)] Pour toute fonction croissante non-bornée $\varphi : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ telle que $\log(x)/\varphi(x)$ est croissante il existe un groupe G tel que

— $I_G \simeq \varphi$

— Il existe une équivalence orbitale de G vers $\mathbb{Z}$ qui est $(\varphi_\varepsilon, L^0)$-intégrable pour tout $\varepsilon > 0$, où $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x)/(\log \circ \varphi(x))^{1+\varepsilon}$.

Bibliographie

Delabie, T. and Koivisto, J and Le Maître, F. and Tessera, R. (2020) *Quantitative measure equivalence*, arXiv :2002.00719.

Escalier, A. (2022), *Building prescribed quantitative orbit equivalence with the group of integers*, arxiv :2202.10312 (À paraître dans Groups, Geometry and dynamics).

Ornstein, D.S. and Weiss, B. (1987) Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups, *Journal d'Analyse Mathématique*, 48(1), pp. 1–141.