Approche du calcul pseudodifférentiel par les groupoïdes de Lie

Clément Cren
Mathematisches Institut,
Georg-August-Universität Göttingen,
Bunsenstraße 3-5, D-37073 Göttingen, Germany
clement.cren@u-pec.fr

Résumé

Cet exposé a pour but d'introduire à des travaux récents permettant de définir le calcul pseudodifférentiel sur une variété lisse de manière intrinsèque (i.e. en se passant de cartes locales) à l'aide du groupoïde tangent. Je décrirai principalement l'approche de Debord et Skandalis ayant donné un second souffle au sujet et permettant de définir le calcul pseudodifférentiel de manière intrinsèque et en se passant de distributions. Si le temps le permet, je parlerai d'une partie de mon travail de thèse étendant le résultat de Debord et Skandalis au cas des variétés filtrées et de leur calcul pseudodifférentiel (résultat préalablement obtenue par Ewert via d'autres méthodes). Une conséquence important de cette approche est la décomposition de l'algèbre des symboles dans le calcul filtré généralisant celle d'Epstein et Melrose pour les variétés de contact.

Mots-clefs : Groupoïdes de Lie, groupoïde tangent, calcul pseudodifférentiel, variétés filtrées.

Abstract

I will talk about recent work that allowed to define pseudodifferential calculus on a manifold intrinsically (i.e. without local charts) using the tangent groupoid. I will mainly describe the Debord-Skandalis approach as their definition doesn't use distributions. If time allows it I will talk about a part of my PhD extending the results of Debord and Skandalis to the case of filtered manifolds and their corresponding pseudodifferential calculus (previously obtained by Ewert using other methods). An important byproduct of our method is a generalization of Epstein and Melrose decomposition of the symbol algebra for contact manifolds to the filtered case.

Keywords: Lie groupoids, tangent groupoid, pseudodifferential calculus, filtered manifolds

1 Le groupoïde tangent

Les groupoïdes sont des objets généralisant la notion de groupe pour encoder des symétries de nature plus locale. La multiplication n'y est plus définie pour toute paire d'éléments. Elle est régie par deux applications "source" et "but", $s, r\colon G \mapsto G^{(0)}$, l'ensemble $G^{(0)}$ est l'ensemble des unités du groupoïde et peut être vu comme sous-ensemble de G. Une multiplication $\gamma_1\gamma_2$ n'est alors définie que si le but de γ_2 est égal à la source de γ_1 (la définition d'un groupoïde nécessite d'autres applications de structure permettant d'encoder aussi l'inversion et ses relations avec la multiplication). Un groupoïde est dit de Lie si G et $G^{(0)}$ et les applications de structure sont lisses et si la source, le but et la multiplication sont des submersions. Un exemple important est donné par le groupoïde des paires. Etant donné une variété M on peut définir une structure de groupoïde sur $M \times M$ avec M comme espace d'unités (vu comme la diagonale dans $M \times M$). Le but et la source sont respectivement la projection sur les premiers et second facteurs. La multiplication de deux couples (x, y) et (z, t) est alors définie lorsque $y = z$ et on a :

$$(x, y)(y, t) = (x, t).$$

Cet exemple est important pour la raison suivante : les groupoïdes de Lie induisent naturellement une opération de convolution sur l'algèbre des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M \times M)$ on pose :

$$f * g(x, z) = \int_y f(x, y)g(y, z).$$

Cette opération s'étend aux distributions à support propre et permet de de réinterpréter le théorème des noyaux de Schwartz. Les opérateurs sur M sont des distributions sur des distributions sur $M \times M$ et la composition des opérateurs correspond à la convolution des distributions correspondantes.

Dans les années 80, Alain Connes introduit le groupoïde tangent d'une variété M [3]. C'est une déformation au cône normal du groupoïde des paires $M \times M$ le long de sa diagonale. Il s'écrit algébriquement comme :

$$\mathbb{T}M := M \times M \times \mathbb{R}^* \sqcup TM \times \{0\} \rightrightarrows M \times \mathbb{R}.$$

La structure de groupoïde pour $t \neq 0$ est donnée par le groupoïde des paires et la structure de groupoïde en $t = 0$ est donnée par la structure de fibrés en groupes abélien du fibré vectoriel $TM \to M$. Alain Connes se sert de ce groupoïde pour définir l'application d'indice analytique sans utiliser d'opérateurs (pseudo)différentiels. Ce groupoïde est muni d'une action de zoom : si $\lambda \neq 0$ on pose :

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda\colon (x, y, t) &\mapsto (x, y, \lambda^{-1}t) \\ (x, \xi, 0) &\mapsto (x, \lambda\xi, 0) \end{aligned}$$

2 Algèbre de Schwartz et calcul pseudodifférentiel

Dans leur article [5], Debord et Skandalis utilisent le groupoïde tangent pour définir intrinsèquement les opérateurs pseudodifférentiels. Pour cela ils utilisent l'algèbre de Schwartz associée. C'est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}M)$ telle que si $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{S}(\mathbb{T}M)$ alors pour $t \neq 0$ $f_t \in \mathscr{C}^\infty_c(M \times M)$ et $t \mapsto f_t$ et ses dérivées ont une décroissance rapide à l'infini. Pour $t = 0$ on a $f_0 \in \mathscr{S}(TM)$ (fibre à fibre la fonction est dans la classe de Schwartz). Debord et Skandalis définissent alors un idéal $\mathcal{J} \subset \mathscr{S}(\mathbb{T}M)$ en considérant les fonctions dont la transformée de Fourier à $t = 0$ s'annule sur la section nulle de T^*M à tous les ordres. Ils montrent que si $f \in \mathcal{J}$ et $g \in \mathscr{C}_c^\infty(M \times M)$ alors $\int_0^{+\infty} t^m f_t * g \frac{\mathrm{d}t}{t} \in \mathscr{C}_c^\infty(M \times M)$. De plus l'opérateur de convolution par $\int_0^{+\infty} t^{-m} f_t \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m sur M. Ils montrent aussi une formule explicite pour le symbole principal. Si P_f désigne l'opérateur construit précédemment à partir de f alors on a $\sigma^m(P_f)(x,\xi) = \int_0^{+\infty} t^{-m}\hat{f}_0(x,t\xi)\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

3 Extension par van Erp-Yuncken et lien entre les constructions

L'idée d'utiliser le groupoïde tangent pour définir le calcul pseudodifférentiel a aussi été exploitée par van Erp et Yuncken d'une autre manière [9]. Ils montrent que les (noyaux des) opérateurs pseudodifférentiels sur M sont exactement les distributions à support propre sur $M \times M$ admettant un prolongement $\mathbb{P}$ à $\mathbb{T}M$ qui soit quasi-homogène au sens suivant :

$$\forall \lambda > 0, \alpha_{\lambda *}\mathbb{P} - \lambda^m \mathbb{P} \in \mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{T}M).$$

Cette définition s'étend alors *mutatis mutandis* aux variétés filtrées. Une variété filtrée est une variété M munie d'une filtration de son fibré tangent :

$$\{0\} = H^0 \subset H^1 \subset \cdots \subset H^r = TM,$$

compatible avec le crochet de Lie de champs de vecteurs :

$$\forall i,j \left[\Gamma(H^i), \Gamma(H^j)\right] \subset \Gamma(H^{i+j}).$$

Des exemples notables sont les variétés feuilletées, les variétés de contact et les variétés sous-riemaniennes (équirégulières). Dans ce contexte il est alors naturel de changer la notion d'ordre pour les opérateurs différentiels en considérant les sections de H^j comme étant d'ordre j (notamment pour l'étude des sous-laplaciens). Le symbole principal n'est alors plus une fonction sur l'espace cotangent mais un opérateur de convolution sur une famille naturelle de groupes de Lie nilpotents (gradués) simplement-connexes $T_H M$ associée à la filtration appelée groupoïde osculateur. La condition d'ellipticité est alors remplacée par une condition dite de Rockland portant sur les représentations irréductibles non-triviales de ces groupes osculateurs. Une version du groupoïde tangent pour les variétés filtrées a été développée par de nombreux auteurs. Elle correspond cette fois à déformer le groupoïde des paires sur le groupoïde osculateur (au lieu du fibré tangent). La définition du calcul pseudodifférentiel par van Erp et Yuncken étend alors le calcul de Heisenberg [1] ($r = 2$, i.e. les filtrations de profondeur 2) ou bien celui développé dans le cas où M est lui-même un groupe de Lie nilpotent gradué simplement connexe [2, 8].

Dans l'article [4] on définit une algèbre de Schwartz sur le groupoïde tangent d'une variété filtrée et une variante $\mathcal{J}_H$ de l'idéal $\mathcal{J}$ de Debord et Skandalis. On peut alors réconcilier les deux approches du calcul pseudodifférentiel :

Théorème 3.1 (Ewert [7], C. [4])**.** *Soit* $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}} \in \mathcal{J}_H$ *alors* $\int_0^{+\infty} t^{-m} f_t \frac{\mathrm{d}t}{t}$ *est un opérateur pseudodifférentiel au sens de van Erp-Yuncken. Son (co)-symbole principal est donné par* $\int_0^{+\infty} t^{-m}\alpha_{\lambda *} f_0 \frac{\mathrm{d}t}{t}$*.*

Une conséquence importante de notre approche est l'obtention d'une décomposition de l'algèbre des symboles principaux. Si $\Sigma^m(T_H M)$ désigne les symboles principaux des opérateurs d'ordre m alors $\Sigma^0(T_H M)$ se prolonge naturellement en une C^*-algèbre (non-commutative) $\Sigma(T_H M)$. Nous en obtenons la décomposition suivante :

Théorème 3.2 (C. [4])**.** *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. L'algèbre* $\Sigma(G)$ *se décompose en une suite d'idéaux imbriqués :*

$$\{0\} = \Sigma_0 \triangleleft \Sigma_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \Sigma_r = \Sigma(G),$$

où

$$\forall i \geq 1, {}^{\Sigma_i}\!/\!_{\Sigma_{i-1}} \cong \mathscr{C}_0\left({}^{\Lambda_i}\!/\!_{\mathbb{R}_+^*}, \mathcal{K}_i\right).$$

Ici Λ_i *est un sous-ensemble des représentations irréductibles non-triviales de* G *(muni de la topologie de Jacobson) tel que les* ${}^{\Lambda_i}\!/\!_{\mathbb{R}_+^*}$ *soient localement compacts (séparés). Les* $\mathcal{K}_i$ *correspondent aux algèbres des opérateurs compacts sur des espaces de Hilbert séparables (de dimension infinie pour* $i < r$ *et de dimension* 1 *pour* $i = d$*).*

Références

[1] Richard Beals and Peter Greiner. *Calculus on Heisenberg Manifolds*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1988.

[2] Michael Christ, Daryl Geller, Paweł Głowacki, and Larry Polin. Pseudodifferential operators on groups with dilations. *Duke Mathematical Journal*, 68(1) :31 – 65, 1992.

[3] Alain Connes. *Noncommutative Geometry*. Elsevier Science, 1994.

[4] Clément Cren. Filtered calculus and crossed products by R-actions, 2023.

[5] Claire Debord and Georges Skandalis. Adiabatic groupoid, crossed product by $\mathbb{R}_+^*$ and pseudodifferential calculus. *Advances in Mathematics*, 257 :66 – 91, 2014.

[6] Charles Epstein and Richard Melrose. The Heisenberg algebra, index theory and homology. Unpublished manuscript, available at https://math.mit.edu/~rbm/book.html.

[7] Eske Ewert. Pseudodifferential operators on filtered manifolds as generalized fixed points. *J. Noncommut. Geom.*, 17(1) :333–383, 2023.

[8] Clotilde Fermanian-Kammerer and Véronique Fischer. Defect measures on graded Lie groups. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 21 :207–291, 2020.

[9] Erik van Erp and Robert Yuncken. A groupoid approach to pseudodifferential operators. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 756(6) :151–182, Nov 2019.