Sur la généralisation d'un théorème de Bryant

Nicolas Choueiry

Département de Mathématiques, Aix-Marseille Université

30 octobre 2023

Liste de mots clés : Théorème de representabilité de Weierstrass, correspondance de Bryant, surface minimales, immersions nulle-holomorphe space like (de type espace), immersion CMC1, métrique riemanienne, courbure moyenne vectorielle d'une immersions.

Définition 1. *Une surface lisse immergée $\phi : M \to \mathbb{R}^3$ est dite minimale si sa courbure moyenne est identiquement nulle.*

Proposition 2. *Soit M une surface de Riemann (variété complexe de dimension un). Une immersion holomorphe $F = (F_1, F_2, F_3) : M \to \mathbb{C}^3$ est nulle holomorphe si elle est dirigée par la sous-variété quadratique*

$$\mathcal{U} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\},$$

c-à-d la dérivée $F' = (F_1', F_2', F_3') : M \to \mathbb{C}^3$ par rapport à toute coordonnée local holomorphe sur M (dans une carte locale (U, φ), $F_i' = (F \circ \varphi^{-1})'$) prend des valeurs dans $\mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Théorème 3 (Théorème de représentation de Weierstrass)**.** *La partie réelle et la partie imaginaire d'une immersion nul holomorphe $M \to \mathbb{C}^3$ sont des immersions $M \to \mathbb{R}^3$ minimales conformes (conservant les angles) .*

Inversement, toute immersion minimale conforme $M \to \mathbb{R}^3$ est localement (sur tout domaine simplement connexe de M) la partie réelle d'une immérsion nulle holomorphe.

Le théorème de représentabilité de Weierstrass établit donc une correspondance entre les surfaces minimales (de courbure moyenne nulle) dans $\mathbb{R}^3$ et les courbes nulles-holomorphes dans $\mathbb{C}^3$. Une fameuse version hyperbolique de cette correspondance est due à Bryant [Br], qui a démontré en 1987 le résultat suivant.

Rappelons avant que :

1. l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ s'identifie au quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$.
2. Si (Y,J) est une surface de Riemann et $(M,\langle . , . \rangle)$ variété riemannienne, on dit alors qu'une immersion $\varphi : Y \to M$ est dite conforme si : $\forall y \in Y, \forall v \in T_yY$,

$$||\varphi_*(v)|| = ||\varphi_*(Jv)|| \text{ et } \langle\ \varphi_*(v)\,,\varphi_*(Jv)\ \rangle_{\varphi(y)} = 0.$$

Soit

$$\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{H}^3$$

la projection canonique et soit Y une surface de Riemann. Une immersion holomorphe $F : Y \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est dite nulle-holomorphe si $\det(F^{-1}dF) = 0$.

Théorème 4 (Théorème de Bryant)**.** *Soient $F : Y \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ une immersion nulle-holomorphe. Alors $\pi \circ F : Y \to \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne constante égale à 1.*

Si Y est simplement connexe, alors, réciproquement, toute immersion conforme $f : Y \to \mathbb{H}^3$ de courbure moyenne constante 1 est la projection d'une immersion nulle-holomorphe $F : Y \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$, qui est unique à translation à droite par une élément de $\mathrm{SU}(2)$ *près.*

Donc, si Y est simplement connexe, le théorème de Bryant établit une correspondence entre les immersions nulles-holomorphes de Y dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et les immersions conformes à courbure moyenne constante 1 (les immersions CMC1) de Y dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

Cette présentation porte sur une généralisation commune de tous ces résultats.

Définition 5. *Un groupe de Lie réel (resp. complexe) est une variété différentiable (resp. analytique complexe) munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses (resp. analytiques). La dimension de la variété sous-jacente est constante, on l'appelle la dimension du groupe de Lie.*

Soit G un groupe de Lie. Pour un élément $g \in G$, on définit le $C^\infty-$difféomorphisme $Lg : G \to G;\ h \mapsto gh.$

Remarque 6. *L'espace tangent T_eG est isomorphe à l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche, c'est-à-dire des champs de vecteurs $X \in \Gamma(G)$ vérifiant*

$$\forall g \in G,\ (Lg)_*X = X.$$

On peut alors construire une structure d'algèbre de Lie sur T_eG.

Définition 7. *L'algèbre de Lie du goupe G noté $\mathfrak{g}$ est l'espace tangent T_eG muni de la structure d'algèbre de lie.*

Définition 8 (Représentation adjointe)**.** *Soit G un group de lie, $\mathfrak{g}$ son lie algèbre, on définit l'automorphisme intérieure :*

$$i_g : G \to G;\ i_g(\gamma) = g\gamma g^{-1}.$$

On définit aussi l'application représentation adjointe de G par :

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g}) = Aut(\mathfrak{g});\ Ad(g) = Ad_g = d_e(i_g).$$

Enfin on définit l'application représentation adjointe de g par :

$$\begin{array}{rccl} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & gl(\mathfrak{g}) \\ & X & \longmapsto & \begin{array}{rccl} ad_X: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & gl(\mathfrak{g}) \\ & Y & \longmapsto & ad_X Y = [X,Y] \end{array} \end{array}$$

avec $ad = d_e(Ad)$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie réelle muni du crochet $[.,.]$. Sa complexification est une algèbre de lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ avec le crochet $[.,.]_{\mathbb{C}}$ défini par

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2]_{\mathbb{C}} = [X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])$$

Définition 9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie complexe, une forme réelle de $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre de lie réelle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ telle que le morphisme $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathfrak{g}$ induit par l'inclusion (En appliquant la propriétés universelle) est un isomorphisme.*
Soit G un group de lie complexe connexe, $\mathfrak{g} = Lie(G)$ et $H \subset G$ un sous group de lie réelle de G tel que $\mathfrak{h} = Lie(H)$ est une forme réel de $\mathfrak{g}$, dans ce cas on dit que H est une forme réel de G.

Définition 10. *Soient (X, g) une variété pseudo-riemannienne et Y variété différentielle. Une immersion $f : Y \to X$ est dite de type espace (space-like) si $f^*(g)$ est définie positive (i.e. si $f^*(g)$ est une métrique riemannienne sur Y).*

L'object de départ est un espace pseudo-riemannien homogène de la forme $M := G/H$, où G est un groupe de Lie complexe, et H est une forme réelle de G munie d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\chi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$, Ad_H-invariante sur son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ i.e.

$$\chi\big(Ad_h(u), Ad_h(v)\big) = \chi(u, v).$$

puis on va définir une condition de nulle holomorphie. Le résultat envisagé va établir une correspondance entre les immersions space-like (de type espace) nulle-holomorphes $f : Y \to$

G et les immersions space-like $\varphi : Y \to M$ dont la courbure moyenne vectorielle (le champ vectoriel courbure moyenne) est donnée par une formule explicite.

En particulier, ce théorème met en évidence une relation générale entre la courbure moyenne vectorielle d'une immersion space-like $\phi : Y \to M$ associée à une immérsion space-like nulle-holomorphe, et la restriction à Y de la courbure riemannienne (en tant que 2-forme) de M ; cette relation générale devient très simple dans les cas particuliers classiques où M est un espace à courbure constante.

Références

[AiAk] R. Aiyama, K. Akutagawa : Kenmotsu–Bryant Type Representation Formulas for Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$, Annals of Global Analysis and Geometry 17 : 49–75 (1998).

[Br] R.Bryant : Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, Astérisque, tome 154-155,p. 321-347 (1987).

[Fu] S. Fujimori : Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space, Hokkaido Mathe- matical Journal Vol. 35, 289–320 (2006).

[KN] Kobayashi S., Nomizu, K. : Foundations of Differential Geometry I, Interscience Publ., New York, Vol. I (1963).

[Le] S. Lee : Spacelike surfaces of constant curvature ±1 in the de Sitter 3-space, Illinois Journal of Mathematics Volume 49, Number 1, 63–98 (2005).

[Ze] R. Zentner : Integrable almost complex structures in principal bundles and holomorphic curves, manuscripta math. Vol. 141, Issue 1–2, 211–239 (2013) https ://doi.org/10.1007/ s00229- 012- 0570- 1.